London Mathematical Society Lecture Note Series. 242

Geometric Galois Actions

1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme

Edited by

Leila Schneps
CNRS

and

Pierre Lochak
CNRS

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

par le diviseur à croisements normaux de Mumford-Deligne. Une autre difficulté, moins sérieuse sans doute, c'est que le soi-disant "espace" modulaire est en fait une *multiplicité* – techniquement, cela s'exprime surtout par la nécessité de remplacer l'ensemble d'indices I pour les strates par une *catégorie* (essentiellement finie) d'indices, en l'occurrence celle des "graphes MD", qui "paramètrent" les "structures combinatoires" possibles d'une courbe stable de type (g,ν). Ceci dit, je puis affirmer que la théorie de dévissage générale, spécialement développée sous la pression du besoin de *cette* cause, s'est révélée en effet un guide précieux, conduisant à une compréhension progressive, d'une cohérence sans failles, de certains aspects essentiels de la tour de Teichmüller (c'est à dire, essentiellement de la "structure à l'infini" des groupes de Teichmüller ordinaires). C'est cette approche qui m'a conduit finalement, dans les mois suivants, vers le principe d'une construction purement combinatoire de la tour des groupoïdes de Teichmüller, dans l'esprit esquissé plus haut (cf. par. 2).

Un autre test de cohérence satisfaisant provient du point de vue "topossique". En effet, mon intérêt pour les multiplicités modulaires provenant avant tout de leur sens algébrico-géométrique et arithmétique, c'est aux multiplicités modulaires *algébriques*, sur le corps de base absolu $\mathbf{Q}$, que je me suis intéressé prioritairement, et à un "dévissage" à l'infini de leurs groupes fondamentaux géométriques (i.e. des groupes de Teichmüller *profinis*) qui soit compatible avec les opérations naturelles de $\mathbb{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Cela semblait exclure d'emblée la possibilité de me référer à une hypothétique théorie de dévissage de structures stratifiées dans un contexte de "topologie modérée" (ou même de topologie ordinaire, cahin-caha), si ce n'est comme fil conducteur entièrement heuristique. Dès lors se posait la question de
$\frac{35}{36}$ traduire, dans le contexte des topos (en l'occurrence les topos étales) intervenant dans la situation, la théorie de dévissage à laquelle j'étais parvenu dans un contexte tout différent – avec la tâche supplémentaire, par la suite, de dégager un théorème de comparaison général, sur le modèle des théorèmes bien connus, pour comparer les invariants obtenus (notamment les types d'homotopie de voisinages tubulaires divers) dans le cadre transcendant, et dans le cadre schématique. J'ai pu me convaincre qu'un tel formalisme de dévissage avait bel et bien un sens dans le contexte (dit "abstrait"!) des topos généraux, ou tout au moins des topos noethériens (comme ceux qui s'introduisent ici), via une notion convenable de *voisinage tubulaire canonique d'un sous-topos* dans un topos ambiant. Une fois cette notion acquise, avec certaines propriétés formelles simples, la description du "dévissage" d'un topos stratifié est considérablement plus simple même dans ce cadre, que dans le cadre topologique (modéré). Il est vrai que là aussi il y a un travail de fondements à faire, notamment pour la notion même

de voisinage tubulaire d'un sous-topos – et il est étonnant d'ailleurs que ce travail (pour autant que je sache) n'ait toujours pas été fait, c'est-à-dire que personne (depuis plus de vingt ans qu'il existe un contexte de topologie étale) ne semble en avoir eu besoin; un signe sûrement que la compréhension de la structure topologique des schémas n'a pas tellement progressé depuis le travail d'Artin-Mazur...

Une fois accompli le double travail de dégrossissage (plus ou moins heuristique) autour de la notion de dévissage d'un espace ou d'un topos stratifié, qui a été une étape cruciale dans ma compréhension des multiplicités modulaires, il est d'ailleurs apparu que pour les besoins de ces dernières, on peut sans doute court-circuiter au moins une bonne partie de cette théorie par des arguments géométriques directs. Il n'en reste pas moins que pour moi, le formalisme de dévissage auquel je suis parvenu a fait ses preuves d'utilité et de cohérence, indépendamment de toute question sur les fondements les plus adéquats qui permettent de lui donner tout son sens.

$\frac{36}{37}$ 6. Un des théorèmes de fondements de topologie (modérée) les plus intéressants qu'il faudrait développer, serait un théorème de "dévissage" (encore!) d'une application modérée propre d'espaces modérés,

$$f : X \longrightarrow Y,$$

via une filtration décroissante de Y par des sous-espaces modérés fermés Y^i, tels que au-dessus des "strates ouvertes" $Y^i \setminus Y^{i-1}$ de cette filtration, f induise une fibration localement triviale (du point de vue modéré, il va sans dire). Un tel énoncé devrait encore se généraliser et se préciser de diverses façons, notamment en demandant l'existence d'un dévissage analogue *simultané*, pour X et une famille finie donnée de sous-espaces (modérés) fermés de X. Egalement la notion même de fibration localement triviale au sens modéré peut se renforcer considérablement, en tenant compte du fait que les strates ouvertes U_i sont *mieux* que des espaces à structure modérée purement locale, du fait qu'elles sont obtenues comme différence de deux espaces modérés, compacts si Y était compact. Entre la notion d'espace modéré compact (qui se réalise comme un des "modèles" de départ dans un $\mathbf{R}^n$) et celle d'espace "localement modéré" (localement compact) qui s'en déduit de façon assez évidente, il y a une notion un peu plus délicate d'*espace "globalement modéré"* X, obtenu comme différence $\widehat{X} \setminus Y$ de deux espaces modérés compacts, étant entendu qu'on ne distingue pas entre l'espace défini par une paire $(\widehat{X}, Y)$, et celui défini par une paire $(\widehat{X}', Y')$ qui s'en déduit par une application modérée (nécessairement propre)

$$g : \widehat{X}' \longrightarrow \widehat{X}$$

induisant une bijection $g^{-1}(X) \xrightarrow{\sim} X$, en prenant $Y' = g^{-1}(Y)$. L'exemple naturel le plus intéressant peut-être est celui où on part d'un schéma séparé
37/38 de type fini sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, en prenant pour X l'ensemble de ses points complexes ou réels, qui hérite d'une structure modérée globale à l'aide des compactifications schématiques (qui existent d'après Nagata) du schéma de départ. Cette notion d'espace globalement modéré est associée à une notion d'application globalement modérée, qui permet à son tour de renforcer en conséquence la notion de fibration localement triviale, dans l'énoncé d'un théorème de dévissage pour une application $f : X \to Y$ (pas nécessairement propre maintenant) dans le contexte des espaces globalement modérés.

J'ai été informé l'été dernier par Zoghman Mebkhout qu'un théorème de dévissage dans cet esprit avait été obtenu récemment dans le contexte des espaces analytiques réels et/ou complexes, avec des Y^i qui, cette fois, sont des sous-espaces analytiques de Y. Ce résultat rend plausible qu'on dispose dès à présent de moyens techniques suffisamment puissants pour démontrer également un théorème de dévissage dans le contexte modéré, plus général en apparence, mais probablement moins ardu.

C'est le contexte d'une topologie modérée également qui devrait permettre, il me semble, de formuler avec précision un principe général très sûr que j'utilise depuis longtemps dans un grand nombre de situations géométriques, que j'appelle le "principe des choix anodins" – aussi utile que vague d'apparence! Il dit, lorsque pour les besoins d'une construction quelconque d'un objet géométrique en termes d'autres, on est amené à faire un certain nombre de choix arbitraires en cours de route, de façon donc que l'objet obtenu dépend en apparence de ces choix et est donc entâché d'un défaut de canonicité, que ce défaut est sérieux en effet (et pour être levé demande une analyse plus soigneuse de la situation, des notions utilisées, des données introduites etc.) chaque fois que l'un au moins de ces choix s'effectue dans un "espace" qui n'est pas "contractile" i.e. dont le π_0 ou un des invariants supérieurs π_i est non trivial; que ce défaut est par contre apparent seulement, que la construction est "essentiellement canon-
38/39 ique" et n'entraînera pas vraiment d'ennuis, chaque fois que les choix faits sont tous "anodins", i.e. s'effectuent dans des espaces contractiles. Quand on essaye dans les cas d'espèce de cerner de plus près ce principe, il semble qu'on tombe à chaque fois sur la notion de "catégories ∞-isotopiques" exprimant une situation donnée, plus fines que les catégories isotopiques (= 0-isotopiques) plus naïves, obtenues en ne retenant que les π_0 des espaces d'isomorphismes qui s'introduisent dans la situation, alors que le point de vue ∞-isotopique retient tout leur type d'homotopie. Par exemple, le point de vue isotopique naïf pour les surfaces compactes à bord orientées de type (g, ν) est "bon" (sans boomerang caché!) exactement dans les cas

que j'appelle "anabéliens" (et que Thurston appelle "hyperboliques") i.e. distincts de $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ – qui sont aussi les cas justement ou le groupe des automorphismes de la surface a une composante neutre contractile. Dans les autres cas, sauf le cas $(0,0)$ de la sphère sans trou, il suffit de travailler avec les catégories 1-isotopiques pour exprimer de façon satisfaisante par voie algébrique les faits géométrico-topologiques essentiels, vu que ladite composante connexe est alors un $K(\pi, 1)$. Travailler dans une catégorie 1-isotopique revient d'ailleurs à travailler dans une bicatégorie, i.e. avec des $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ qui sont (non plus des ensembles discrets comme dans le point de vue 0-isotopique, mais) des groupoïdes (dont les π_0 ne sont autres que les Hom 0-isotopiques). C'est la description en termes purement algébriques de cette bicatégorie qui est faite dans la dernière partie de la thèse de Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

Si je me suis étendu ici plus longuement sur le thème des fondements de la topologie modérée, qui n'est nullement un de ceux auxquels je compte me consacrer prioritairement dans les années qui viennent, c'est sans doute justement que je sens qu'il y a là d'autant plus une cause qui a besoin d'être plaidée, ou plutôt: un travail d'une grande actualité qui a besoin de bras! Comme naguère pour de nouveaux fondements de la géométrie algébrique,
39/40 ce ne sont pas des plaidoyers qui surmontent l'inertie des habitudes acquises, mais un travail tenace, méticuleux, sans doute de longue haleine, et porteur au jour le jour de moissons éloquentes.

Je voudrais encore dire quelques mots sur une réflexion plus ancienne (fin des années 60?), très proche de celle dont il vient d'être question, inspirée par les idées de Nash, qui m'avaient beaucoup frappé. Au lieu ici de définir axiomatiquement une notion de "théorie modérée" via la donnée de "partie modérée de $\mathbb{R}^n$" satisfaisant à certaines conditions (de stabilité surtout), c'est à une axiomatisation de la notion de "variété lisse" et du formalisme différentiable sur de telles variétés que j'en avais, via la donnée, pour chaque entier naturel n, d'un sous-anneau $\mathcal{A}_n$ de l'anneau des germes de fonctions réelles à l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Ce sont les fonctions qui seront admises pour exprimer les "changements de carte" pour la notion de $\mathcal{A}$-variété correspondante, et il s'est agi de dégager tout d'abord un système d'axiomes sur le système $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui assure à cette notion de variété une souplesse comparable à celle de variété C^∞, ou analytique réelle (ou de Nash). Suivant le type de constructions familières qu'on tient à pouvoir effectuer dans le contexte des $\mathcal{A}$-variétés, le système d'axiomes pertinent est plus ou moins réduit, ou riche. Très peu suffit s'il s'agit seulement de développer le formalisme différentiel, avec la construction de fibrés de jets, les complexes de De Rham etc. Si on veut un énoncé du type "quasi-fini implique fini" (pour une application au voisinage d'un point),

qui est apparu comme un énoncé-clef dans la théorie locale des espaces analytiques, il faut un axiome de stabilité de nature plus délicate, dans le
40/41 "Vorbereitungssatz" de Weierstrass (*) Dans d'autres questions, un axiome de stabilité par prolongement analytique (dans $\mathbb{C}^n$) apparaît nécessaire. L'axiome le plus draconien que j'ai été amené à introduire, lui aussi un axiome de stabilité, concerne l'intégration des systèmes de Pfaff, assurant que certains groupes de Lie, voire tous, sont des $\mathcal{A}$-variétés. Dans tout ceci, j'ai pris soin de ne pas supposer que les $\mathcal{A}_n$ soient des $\mathbf{R}$-algèbres, donc une fonction constante sur une $\mathcal{A}$-variété n'est "admissible" que si sa valeur appartient à un certain sous-corps K de $\mathbf{R}$ (c'est, si on veut, $\mathcal{A}_0$). Ce sous-corps peut fort bien être $\mathbf{Q}$, ou sa fermeture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_r$ dans $\mathbf{R}$, ou toute autre sous-extension de $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$, de préférence même de degré de transcendance fini, ou du moins dénombrable, sur $\mathbf{Q}$. Cela permet par exemple, comme tantôt pour les espaces modérés, de faire correspondre à tout point x d'une variété (de type $\mathcal{A}$) un corps résiduel $k(x)$, qui est une sous-extension de $\mathbf{R}/K$. Un fait qui me semble important ici, c'est que même sous sa forme la plus forte, le système d'axiomes n'implique pas qu'on doive avoir $K = \mathbf{R}$. Plus précisément, du fait que tous les axiomes sont des axiomes de stabilité, il résulte que pour un ensemble S donné de germes de fonctions analytiques réelles à l'origine (dans divers espaces $\mathbf{R}^n$), il existe une plus petite théorie $\mathcal{A}$ pour laquelle ces germes sont admissibles, et que celle-ci est "dénombrable" i.e. les $\mathcal{A}_n$ sont dénombrables, dès que S l'est. A fortiori, K est alors dénombrable, i.e. de degré de transcendance dénombrable sur $\mathbf{Q}$.

L'idée est ici d'introduire, par le biais de cette axiomatique, une notion de fonction (analytique réelle) "élémentaire", ou plutôt, toute une hiérarchie de telles notions. Pour une fonction de 0 variables, i.e. une constante, cette notion donne celle de "constante élémentaire", incluant notamment (dans le cas de l'axiomatique la plus forte) des constantes telles que π, e et une multitude d'autres, en prenant des valeurs de fonctions admissibles (telles l'exponentielle, le logarithme etc.) pour des systèmes de valeurs "admissibles" de l'argument. On sent que la relation entre le système $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbf{N}}$
41/42 et le corps de rationalité K correspondant doit être très étroite, du moins pour des $\mathcal{A}$ qui peuvent être engendrés par un "système de générateurs" S fini – mais il est à craindre que la moindre question intéressante qu'on pourrait se poser sur cette situation soit actuellement hors de portée ([1]).

Ces réflexions anciennes ont repris quelque actualité pour moi avec ma

(*) Il peut paraître plus simple de dire que les anneaux (locaux) $\mathcal{A}_n$ sont henséliens, ce qui est équivalent. Mais il n'est nullement clair a priori sous cette dernière forme que la condition en question est dans la nature d'une condition de stabilité, circonstance importante comme il apparaîtra dans les réflexions qui suivent.

réflexion ultérieure sur les théories modérées. Il me semble en effet qu'il est possible d'associer de façon naturelle à une "théorie différentiable" $\mathcal{A}$ une théorie modérée $\mathcal{T}$ (ayant sans doute même corps de constantes), de telle façon que toute $\mathcal{A}$-variété soit automatiquement munie d'une structure $\mathcal{T}$-modérée, et inversement que pour tout espace $\mathcal{T}$-modéré compact X, on puisse trouver une partie fermée modérée rare Y dans X, telle que $X \setminus Y$ provienne d'une $\mathcal{A}$-variété, et que de plus cette structure de $\mathcal{A}$-variété soit unique tout au moins dans le sens suivant: deux telles structures coïncident dans le complémentaire d'une partie modérée rare $Y' \supset Y$ de X. La théorie de dévissage des structures modérées stratifiées (dont il a été question au par. précédent), dans le cas des strates lisses, devrait d'ailleurs soulever des questions beaucoup plus précises encore de comparaison des structures modérées avec des structures de type différentiable (ou plutôt, $\mathbf{R}$-analytique). Je soupçonne que le type d'axiomatisation proposé ici pour la notion de "théorie différentiable" fournirait un cadre naturel pour formuler de telles questions avec toute la précision et la généralité souhaitables.

7. Depuis le mois de mars de l'an dernier, donc depuis près d'un an, la plus grande partie de mon énergie a été consacrée à un travail de réflexion sur les fondements de l'algèbre (co)homologique non commutative, ou ce qui revient au même, finalement, de l'algèbre homotopique. Ces réflexions se sont concrétisées par un volumineux paquet de notes dactylographiées, destinées à former le premier volume (actuellement en cours d'achève-
42/43 ment) d'un ouvrage en deux volumes à paraître chez Hermann, sous le titre commun "A la Poursuite des Champs". Je prévois actuellement (après des élargissements successifs du propos initial) que le manuscrit de l'ensemble des deux volumes, que j'espère achever en cours d'année pour ne plus avoir à y revenir, fera dans les 1500 pages dactylographiées. Ces deux volumes d'ailleurs sont pour moi les premiers d'une série plus vaste, sous le titre commun "Réflexions Mathématiques", où je compte développer tant soit peu certains des thèmes esquissés dans le présent rapport.

Vu qu'il s'agit d'un travail en cours de rédaction, et même d'achèvement, dont le premier volume sans doute paraîtra cette année et contiendra une introduction circonstanciée, il est sans doute moins intéressant que je m'étende ici sur ce thème de réflexion, et je me contenterai donc d'en parler très brièvement. Ce travail me semble quelque peu marginal par rapport aux thèmes que je viens d'esquisser, et ne représente pas (il me semble) un véritable renouvellement d'optique ou d'approche par rapport à mes intérêts et ma vision mathématiques d'avant 1970. Si je m'y suis résolu soudain, c'est presque en désespoir de cause, alors que près de vingt ans se sont écoulés depuis que se sont posées en termes bien clairs un certain nombre de ques-

tions visiblement fondamentales, et mûres pour être menées à leur terme, sans que personne ne les voie, ou prenne la peine de les sonder. Aujourd'hui encore, les structures de base qui interviennent dans le point de vue homotopique en topologie, y compris même en algèbre homologique commutative, ne sont pas comprises, et à ma connaissance, après les travaux de Verdier, de Giraud et d'Illusie, sur ce thème (qui constituent autant de "coups d'envoi" attendant toujours une suite...) il n'y a pas eu d'effort dans ce sens. Je devrais faire exception sans doute pour le travail d'axiomatisation fait par Quillen sur la notion de catégorie de modèles, à la fin des années 60, et repris sous des variantes diverses par divers auteurs. Ce travail à l'époque, et maintenant encore, m'a beaucoup séduit et appris, tout en allant dans
43/44 une direction assez différente de celle qui me tenait et tient à coeur. Il introduit certes des catégories dérivées dans divers contextes non commutatifs, mais sans entrer dans la question des structures internes essentielles d'une telle catégorie, laissée ouverte également dans le cas commutatif par Verdier, et après lui par Illusie. De même, la question de mettre le doigt sur les "coefficients" naturels pour un formalisme cohomologique non commutatif, au-delà des champs (qu'on devrait appeler 1-champs) étudiés dans le livre de Giraud, restait ouverte – ou plutôt, les intuitions riches et précises qui y répondent, puisées dans des exemples nombreux provenant de la géométrie algébrique notamment, attendent toujours un langage précis et souple pour leur donner forme.

Je reviens sur certains aspects de ces questions de fondements en 1975, à l'occasion (je crois me souvenir) d'une correspondance avec Larry Breen (deux lettres de cette correspondance seront reproduites en appendice au Chap. I du volume 1, "Histoires de Modèles", de la Poursuite des Champs). A ce moment apparaît l'intuition que les ∞-groupoïdes doivent constituer des modèles, particulièrement adéquats, pour les types d'homotopie, les n-groupoïdes correspondant aux types d'homotopie tronqués (avec $\pi_i = 0$ pour $i > n$). Cette même intuition, par des voies très différentes, a été retrouvée par Ronnie Brown à Bangor et certains de ses élèves, mais en utilisant une notion de ∞-groupoïde assez restrictive (qui, parmi les types d'homotopie 1-connexes, ne modélise que les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane). C'est stimulé par une correspondance à bâtons rompus avec Ronnie Brown, que j'ai finalement repris une réflexion, commençant par un essai de définition d'une notion de ∞-groupoïde plus large (rebaptisé par la suite "champ en ∞-groupoïdes" ou simplement "champ", sous-entendu: sur le topos ponctuel), et qui de fil en aiguille m'a amené à la Poursuite des Champs. Le volume "Histoire de Modèles" y constitue d'ailleurs une digression entièrement imprévue par rapport au propos initial (les fameux champs étant provisoirement oubliés, et n'étant prévus réapparaître que

44/45 vers les pages 1000 environ...).

Ce travail n'est pas entièrement isolé par rapport à mes intérêts plus récents. Par exemple, ma réflexion sur les multiplicités modulaires $\widehat{M}_{g,\nu}$ et leur structure stratifiée a relancé une réflexion sur un théorème de Van Kampen de dimension > 1 (un des thèmes de prédilection également du groupe de Bangor), et a peut-être contribué à préparer le terrain pour le travail de plus grande envergure l'année d'après. Celui-ci rejoint également par moments une réflexion datant de la même année 1975 (ou l'année d'après) sur un "complexe de De Rham à puissances divisées", qui a fait l'objet de ma dernière conférence publique, à l'IHES en 1976, et dont le manuscrit, confié je ne me rappelle plus à qui après l'exposé, est d'ailleurs perdu. C'est au moment de cette réflexion que germe aussi l'intuition d'une "schématisation" des types d'homotopie, que sept ans après j'essaye de préciser dans un chapitre (particulièrement hypothétique) de l'Histoire de Modèles.

Le travail de réflexion entrepris dans la Poursuite des Champs est un peu comme une dette dont je m'acquitterais, vis-à-vis d'un passé scientifique où, pendant une quinzaine d'années (entre 1955 et 1970), le développement d'outils cohomologiques a été le Leitmotiv constant, dans mon travail de fondements de la géométrie algébrique. Si la reprise actuelle de ce thème-là a pris des dimensions inattendues, ce n'est pas cependant par pitié pour un passé, mais à cause des nombreux imprévus faisant irruption sans cesse, en bousculant sans ménagement les plans et propos prévus – un peu comme dans un conte des mille et une nuits, où l'attention se trouve maintenue en haleine à travers vingt autres contes avant de connaître le fin mot du premier.

8. J'ai très peu parlé encore des réflexions plus terre-à-terre de géométrie topologique bidimensionelle, associées notamment à mes activités d'enseignant et celles dites de "direction de recherches". A plusieurs reprises, j'ai
45/46 vu s'ouvrir devant moi de vastes et riches champs mûrs pour la moisson, sans que jamais je réussisse à communiquer cette vision, et l'étincelle qui l'accompagne, à un (ou une) de mes élèves, et à la faire déboucher sur une exploration commune, de plus ou moins longue haleine. A chaque fois jusqu'à aujourd'hui même, après une prospection de quelques jours ou quelques semaines, où je découvrais en éclaireur des richesses insoupçonnées au départ, le voyage tournait court, quand il devenait clair que je serais seul à le poursuivre. Des intérêts plus forts prenaient le pas alors sur un voyage qui, dès lors, apparaissait comme une digression, voire une dispersion, plutôt qu'une aventure poursuivie en commun.

Un de ces thèmes a été celui des polygones plans, centré autour des variétés modulaires qu'on peut leur associer. Une des surprises ici a été their connections with spherical, Euclidean and hyperbolic geometry and with algebraic curves, and with the language and the basic techniques of modern algebraic geometry. Will there be found one, some day, who will seize this opportunity?

5. I would like to say a few words now about some topological considerations which have made me understand the necessity of new foundations for "geometric" topology, in a direction quite different from the notion of topos, and actually independent of the needs of so-called "abstract" algebraic geometry (over general base fields and rings). The problem I started from, which already began to intrigue me some fifteen years ago, was that of defining a theory of "dévissage" for stratified structures, in order to rebuild them, via a canonical process, out of "building blocks" canonically deduced from the original structure. Probably the main example which had led me to that question was that of the canonical stratification of a singular algebraic variety (or a complex or real singular space) through the decreasing sequence of its successive singular loci. But I probably had the premonition of the ubiquity of stratified structures in practically all domains of geometry (which surely others had seen clearly a long time before). Since then, I have seen such structures appear, in particular, in any situation where "moduli" are involved for geometric objects which may undergo not only continuous variations, but also "degeneration" (or "specialisation") phenomena – the strata corresponding then to the various "levels of singularity" (or to the
25/26 associated combinatorial types) for the objects in question. The compactified modular multiplicities $\widehat{M}_{g,\nu}$ of Mumford-Deligne for the stable algebraic curves of type (g,ν) provide a typical and particularly inspiring example, which played an important motivating role when I returned to my reflection about stratified structures, from December 1981 to January 1982. Two-dimensional geometry provides many other examples of such modular stratified structures, which all (if not using rigidification) appear as "multiplicities" rather than as spaces or manifolds in the usual sense (as the points of these multiplicities may have non-trivial automorphism groups). Among the objects of two-dimensional geometry which give rise to such modular stratified structures in arbitrary dimensions, or even infinite dimension, I would list polygons (Euclidean, spherical or hyperbolic), systems of straight lines in a plane (say projective), systems of "pseudo straight lines" in a projective topological plane, or more general immersed curves with normal crossings, in a given (say compact) surface.

The simplest non-trivial example of a stratified structure is obtained by considering a pair (X, Y) of a space X and a closed subspace Y, with a suitable assumption of equisingularity of X along Y, and assuming moreover

(to fix ideas) that both strata Y and $X \setminus Y$ are topological manifolds. The naive idea, in such a situation, is to consider "the" tubular neighbourhood T of Y in X, whose boundary ∂T should also be a smooth manifold, fibred with compact smooth fibres over Y, whereas T itself can be identified with the conical fibration associated to the above one. Setting

$$U = X \setminus \operatorname{Int}(T),$$

one finds a manifold with boundary, whose boundary is canonically isomorphic to the boundary of T. This being said, the "building blocks" are the manifold with boundary U (compact if X is compact, and which replaces
26/27 and refines the "open" stratum $X \setminus Y$) and the manifold (without boundary) Y, together with, as an additional structure which connects them, the "glueing" map

$$f : \partial U \longrightarrow Y$$

which is a proper and smooth fibration. The original situation (X, Y) can be recovered from $(U, Y, f : \partial U \to Y)$ via the formula

$$X \cong U \coprod_{\partial U} Y$$

(amalgamated sum over ∂U, mapping into U and Y by inclusion resp. the glueing map).

This naive vision immediately encounters various difficulties. The first is the somewhat vague nature of the very notion of tubular neighbourhood, which acquires a tolerably precise meaning only in the presence of structures which are much more rigid than the mere topological structure, such as "piecewise linear" or Riemannian (or more generally, space with a distance function) structure; the trouble here is that in the examples which naturally come to mind, one does not have such structures at one's disposal – at best an equivalence class of such structures, which makes it possible to rigidify the situation somewhat. If on the other hand one assumes that one might find an expedient in order to produce a tubular neighbourhood having the desired properties, which moreover would be unique modulo an automorphism (say a topological one) of the situation – an automorphism which moreover respects the fibred structure provided by the glueing map, there still remains the difficulty arising from the lack of canonicity of the choices involved, as the said automorphism is obviously not unique, whatever may be done in order to "normalise" it. The idea here, in order to make canonical something which is not, is to work systematically in the framework of the "isotopic categories" associated to the categories of a topological nature which are naturally present in such questions (such as the category of

admissible pairs (X, Y) and homeomorphisms of such pairs etc.), retaining
27/28 the same objects, but defining as "morphisms" the isotopy classes (in a sense which is dictated unambiguously by the context) of isomorphisms (or even morphisms more general than isomorphisms). I used this idea, which is taken up successfully in the thesis of Yves Ladegaillerie (see beginning of par. 3), in a systematic way in all my later reflections on combinatorial topology, when it came to a precise formulation of translation theorems of topological situations in terms of combinatorial situations. In the present situation, my hope was to be able to formulate (and prove!) a theorem of equivalence between two suitable isotopic categories, one being the category of "admissible pairs" (X, Y), and the other the category of "admissible triples" (U, Y, f), where Y is a manifold, U a manifold with boundary, and $f : \partial U \to Y$ a smooth and proper fibration. Moreover, I hoped that such a statement could be naturally extended, modulo some essentially algebraic work, to a more general statement, which would apply to general stratified structures.

It soon appeared that there could be no question of getting such an ambitious statement in the framework of topological spaces, because of the sempiternal "wild" phenomena. Already when X itself is a manifold and Y is reduced to a point, one is confronted with the difficulty that the cone over a compact space Z can be a manifold at its vertex, even if Z is not homeomorphic to a sphere, nor even a manifold. It was also clear that the contexts of the most rigid structures which existed then, such as the "piecewise linear" context were equally inadequate – one common disadvantage consisting in the fact that they do not make it possible, given a pair (U, S) of a "space" U and a closed subspace S, and a glueing map $f : S \to T$, to build the corresponding amalgamated sum. Some years later, I was told of Hironaka's theory of what he calls, I believe, (real) "semi-analytic" sets which satisfy certain essential stability conditions (actually probably all of
28/29 them), which are necessary to develop a usable framework of "tame topology". This triggered a renewal of the reflection on the foundations of such a topology, whose necessity appears more and more clearly to me.

After some ten years, I would now say, with hindsight, that "<u>general topology" was developed</u> (during the thirties and forties)<u>by analysts and in order to meet the needs of analysis</u>, not for topology per se, i.e. the study of the <u>topological properties of the various geometrical shapes</u>. That the foundations of topology are inadequate is manifest from the very beginning, in the form of "false problems" (at least from the point of view of the topological intuition of shapes) such as the "invariance of domains", even if the solution to this problem by Brouwer led him to introduce new geometrical ideas. Even now, just as in the heroic times when one anxiously witnessed

for the first time curves cheerfully filling squares and cubes, when one tries to do topological geometry in the technical context of topological spaces, one is confronted at each step with spurious difficulties related to wild phenomena. For instance, it is not really possible, except in very low dimensions, to study for a given space X (say a compact manifold), the homotopy type of (say) the automorphism group of X, or of the space of embeddings, or immersions etc. of X into some other space Y – whereas one feels that these invariants should be part of the toolbox of the essential invariants attached to X, or to the pair (X, Y), etc. just as the function space $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ which is familiar in homotopical algebra. Topologists elude the difficulty, without tackling it, moving to contexts which are close to the topological one and less subject to wildness, such as differentiable manifolds, PL spaces (piecewise linear) etc., of which it is clear that none is "good", i.e. stable under
29/30 the most obvious topological operations, such as contraction-glueing operations (not to mention operations like $X \to \mathrm{Aut}(X)$ which oblige one to leave the paradise of finite dimensional "spaces"). This is a way of beating about the bush! This situation, like so often already in the history of our science, simply reveals the almost insurmountable inertia of the mind, burdened by a heavy weight of conditioning, which makes it difficult to take a real look at a foundational question, thus at the context in which we live, breathe, work – accepting it, rather, as immutable data. It is certainly this inertia which explains why it tooks millenia before such childish ideas as that of zero, of a group, of a topological shape found their place in mathematics. It is this again which explains why the rigid framework of general topology is patiently dragged along by generation after generation of topologists for whom "wildness" is a fatal necessity, rooted in the nature of things.

My approach toward possible foundations for a tame topology has been an axiomatic one. Rather than declaring (which would indeed be a perfectly sensible thing to do) that the desired "tame spaces" are no other than (say) Hironaka's semianalytic spaces, and then developing in this context the toolbox of constructions and notions which are familiar from topology, supplemented with those which had not been developed up to now, for that very reason, I preferred to work on extracting which exactly, among the geometrical properties of the semianalytic sets in a space $\mathbb{R}^n$, make it possible to use these as local "models" for a notion of "<u>tame space</u>" (here semianalytic), and what (hopefully!) makes this notion flexible enough to use it effectively as the fundamental notion for a "tame topology" which would express with ease the topological intuition of shapes. Thus, once this necessary foundational work has been completed, there will appear not <u>one</u> "tame theory",
30/31 but a vast infinity, ranging from the strictest of all, the one which deals with "piecewise $\overline{\mathbb{Q}}_r$-algebraic spaces" (with $\overline{\mathbb{Q}}_r = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$), to the one which

appears (whether rightly or not) to be likely to be the vastest of all, namely using "piecewise real analytic spaces" (or semianalytic using Hironaka's terminology). Among the foundational theorems which I envision in my programme, there is a comparison theorem which, to put it vaguely, would say that one will essentially find the same isotopic categories (or even ∞-isotopic) whatever the tame theory one is working with. In a more precise way, the question is to put one's finger on a system of axioms which is rich enough to imply (among many other things) that if one has two tame theories $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ with $\mathcal{T}$ finer than $\mathcal{T}'$ (in the obvious sense), and if X, Y are two $\mathcal{T}$-tame spaces, which thus also define corresponding $\mathcal{T}'$-tame spaces, the canonical map

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{T}}(X,Y) \to \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{T}'}(X,Y)$$

induces a bijection on the set of connected components (which will imply that the isotopic category of the $\mathcal{T}$-spaces is equivalent to the $\mathcal{T}'$-spaces), and is even a homotopy equivalence (which means that one even has an equivalence for the "∞-isotopic" categories, which are finer than the isotopic categories in which one retains only the π_0 of the spaces of isomorphisms). Here the Isom may be defined in an obvious way, for instance as semisimplicial sets, in order to give a precise meaning to the above statement. Analogous statements should be true, if one replaces the "spaces" Isom with other spaces of maps, subject to standard geometric conditions, such as those of being embeddings, immersions, smooth, etale, fibrations etc. One also expects analogous statements where X, Y are replaced by systems of tame spaces, such as those which occur in a theory of dévissage of stratified structures – so that in a precise technical sense, this dévissage
31/32 theory will also be essentially independent of the tame theory chosen to express it.

The first decisive test for a good system of axioms defining the notion of a "tame subset of $\mathbb{R}^n$" seems to me to consist in the possibility of proving such comparison theorems. I have settled for the time being for extracting a temporary system of plausible axioms, without any assurance that other axioms will not have to be added, which only working on specific examples will cause to appear. The strongest among the axioms I have introduced, whose validity is (or will be) most likely the most delicate to check in specific situations, is a triangulability axiom (in a tame sense, it goes without saying) of a tame part of $\mathbb{R}^n$. I did not try to prove the comparison theorem in terms of these axioms only, however I had the impression (right or wrong again!) that this proof, whether or not it necessitates the introduction of some additional axiom, will not present serious technical difficulties. It may well be that the technical difficulties in the development of satisfactory foundations for tame topology, including a theory of dévissage for

tame stratified structures are actually already essentially concentrated in the axioms, and consequently already essentially overcome by triangulability theorems à la Lojasiewicz and Hironaka. What is again lacking is not the technical virtuosity of the mathematicians, which is sometimes impressive, but the audacity (or simply innocence...) to free oneself from a familiar context accepted by a flawless consensus...

The advantages of an axiomatic approach towards the foundations of tame topology seem to me to be obvious enough. Thus, in order to consider a complex algebraic variety, or the set of real points of an algebraic variety defined over $\mathbb{R}$, as a tame space, it seems preferable to work with the "piecewise $\mathbb{R}$-algebraic" theory , maybe even the $\overline{\mathbb{Q}}_r$-algebraic theory (with
32/33 $\overline{\mathbb{Q}}_r = \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) when dealing with varieties defined over number fields, etc. The introduction of a subfield $K \subset \mathbb{R}$ associated to the theory $\mathcal{T}$ (consisting in the points of $\mathbb{R}$ which are $\mathcal{T}$-tame, i.e. such that the corresponding one-point set is $\mathcal{T}$-tame) make it possible to introduce for any point x of a tame space X, a residue field $k(x)$, which is an algebraically closed subextension of $\mathbb{R}/K$, of finite transcendence degree over K (bounded by the topological dimension of X). When the transcendence degree of $\mathbb{R}$ over K is infinite, we find a notion of transcendence degree (or "dimension") of a point of a tame space, close to the familiar notion in algebraic geometry. Such notions are absent from the "semianalytic" tame topology, which however appears as the natural topological context for the inclusion of real and complex analytic spaces.

Among the first theorems one expects in a framework of tame topology as I perceive it, aside from the comparison theorems, are the statements which establish, in a suitable sense, the existence and uniqueness of "the" tubular neighbourhood of closed tame subspace in a tame space (say compact to make things simpler), together with concrete ways of building it (starting for instance from any tame map $X \to \mathbb{R}^+$ having Y as its zero set), the description of its "boundary" (although generally it is in no way a manifold with boundary!) ∂T, which has in T a neighbourhood which is isomorphic to the product of T with a segment, etc. Granted some suitable equisingularity hypotheses, one expects that T will be endowed, in an essentially unique way, with the structure of a locally trivial fibration over Y, with ∂T as a subfibration. This is one of the least clear points in my temporary intuition of the situation, whereas the homotopy class of the predicted structure map $T \to Y$ has an obvious meaning, independent of any equisingularity hypothesis, as the homotopic inverse of the inclusion map $Y \to T$, which must be a homotopism. One way to a posteriori obtain such a structure would be via the hypothetical equivalence of isotopic categories which was
33/34 considered at the beginning, taking into account the fact that the functor

$(U, Y, f) \longmapsto (X, Y)$ is well-defined in an obvious way, independently of any theory of tubular neighbourhoods.

It will perhaps be said, not without reason, that all this may be only dreams, which will vanish in smoke as soon as one sets to work on specific examples, or even before, taking into account some known or obvious facts which have escaped me. Indeed, only working out specific examples will make it possible to sift the right from the wrong and to reach the true substance. The only thing in all this which I have no doubt about, is the very necessity of such a foundational work, in other words, the artificiality of the present foundations of topology, and the difficulties which they cause at each step. It may be however that the formulation I give of a theory of dévissage of stratified structures in terms of an equivalence theorem of suitable isotopic (or even ∞-isotopic) categories is actually too optimistic. But I should add that I have no real doubts about the fact that the theory of these dévissages which I developed two years ago, although it remains in part heuristic, does indeed express some very tangible reality. In some part of my work, for want of a ready-to-use "tame" context, and in order to have precise and provable statements, I was led to postulate some very plausible additional structures on the stratified structure I started with, especially concerning the local retraction data, which do make it possible to construct a canonical system of spaces, parametrised by the ordered set of flags $\mathrm{Drap}(I)$ of the ordered set I indexing the strata; these spaces play the role of the spaces (U, Y) above, and they are connected by embedding and proper fibration maps, which make it possible to reconstitute in an equally canonical way the original stratified structure, including these "additional structures" ([7]). The only trouble here, is that these appear as an additional artificial element of structure, which is no way part of the data in the usual
34/35 geometric situations, as for example the compact moduli space $\widehat{M}_{g,\nu}$ with its canonical "stratification at infinity", defined by the Mumford-Deligne divisor with normal crossings. Another, probably less serious difficulty, is that this so-called moduli "space" is in fact a multiplicity – which can be technically expressed by the necessity of replacing the index set I for the strata with an (essentially finite) category of indices, here the "MD graphs" which "parametrise" the possible "combinatorial structures" of a stable curve of type (g, ν). This said, I can assert that the general theory of dévissage, which has been developed especially to meet the needs of this example, has indeed proved to be a precious guide, leading to a progressive understanding, with flawless coherence, of some essential aspects of the Teichmüller tower (that is, essentially the "structure at infinity" of the ordinary Teichmüller groups). It is this approach which finally led me, within some months, to the principle of a purely combinatorial construction of the tower

of Teichmüller groupoids, in the spirit sketched above (cf. par. 2).

Another satisfying test of coherence comes from the "topossic" viewpoint. Indeed, as my interest for the multiplicities of moduli was first prompted by their algebrico-geometric and arithmetic meaning, I was first and foremost interested by the modular algebraic multiplicities, over the absolute basefield $\mathbb{Q}$, and by a "dévissage" at infinity of their geometric fundamental groups (i.e. of the profinite Teichmüller groups) which would be compatible with the natural operations of $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. This requirement seemed to exclude from the start the possibility of a reference to a hypothetical theory of dévissage of stratified structures in a context of "tame topology" (or even, at worst, of ordinary topology), beyond a purely heuristic guiding thread. Thus the question arose of translating, in the context of the
35/36 topoi (here etale topoi) which were present in the situation, the theory of dévissage I had arrived at in a completely different context – with the additional task, in the sequel, of extracting a general comparison theorem, patterned after well-known theorems, in order to compare the invariants (in particular the homotopy types of various tubular neighbourhoods) obtained in the transcendent and schematic frameworks. I have been able to convince myself that such a formalism of dévissage indeed had some meaning in the (so-called "abstract"!) context of general topoi, or at least noetherian topoi (like those occurring in this situation), via a suitable notion of canonical tubular neighbourhood of a subtopos in an ambient topos. Once this notion is acquired, together with some simple formal properties, the description of the "dévissage" of a stratified topos is even considerably simpler in that framework than in the (tame) topological one. True, there is foundational work to be done here too, especially around the very notion of the tubular neighbourhood of a subtopos – and it is actually surprising that this work (as far as I know) has still never been done, i.e. that no one (since the context of etale topology appeared, more than twenty years ago) apparently ever felt the need for it; surely a sign that the understanding of the topological structure of schemes has not made much progress since the work of Artin-Mazur...

Once I had accomplished this (more or less heuristic) double work of refining the notion of dévissage of a stratified space or topos, which was a crucial step in my understanding of the modular multiplicities, it actually appeared that, as far as these are concerned, one can actually take a short cut for at least a large part of the theory, via direct geometric arguments. Nonetheless, the formalism of dévissage which I reached has proved its usefulness and its coherence to me, independently of any question about the most adequate foundations which make it completely meaningful.

36/37 6. One of the most interesting foundational theorems of (tame) topology which should be developed would be a theorem of "dévissage" (again!) of a proper tame map of tame spaces

$$f : X \to Y,$$

via a decreasing filtration of Y by closed tame subspaces Y^i, such that above the "open strata" $Y^i \backslash Y^{i-1}$ of this filtration, f induces a locally trivial fibration (from the tame point of view, it goes without saying). It should be possible to generalise such a statement even further and to make it precise in various ways, in particular by requiring the existence of an analogous simultaneous dévissage for X and for a given finite family of (tame) closed subspaces of X. Also the very notion of locally trivial fibration in the tame sense can be made considerably stronger, taking into account the fact that the open strata U_i are better than spaces whose tame structure is purely local, because they are obtained as differences of two tame spaces, compact if Y is compact. Between the notion of a compact tame space (which is realised as one of the starting "models" in an $\mathbb{R}^n$) and that of a "locally tame" (locally compact) space which can be deduced from it in a relatively obvious way, there is a somewhat more delicate notion of a "globally tame" space X, obtained as the difference $\hat{X} \backslash Y$ of two compact tame spaces, it being understood that we do not distinguish between the space defined by a pair $(\hat{X}, Y)$ and that defined by a pair $(\hat{X}', Y')$ deduced from it by a (necessarily proper) tame map

$$g : \hat{X}' \to \hat{X}$$

inducing a bijection $g^{-1}(X) \to X$, taking $Y' = g^{-1}(Y)$. Perhaps the most interesting natural example is the one where we start from a separated
37/38 scheme of finite type over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, taking for X the set of its real or complex points, which inherits a global tame structure with the help of schematic compactifications (which exist according to Nagata) of the scheme we started with. This notion of a globally tame space is associated to a notion of a globally tame map, which in turn allows us to strengthen the notion of a locally trivial fibration, in stating a theorem of dévissage for a map $f : X \to Y$ (now not necessarily proper) in the context of globally tame spaces.

I was informed last summer by Zoghman Mebkhout that a theorem of dévissage in this spirit has been recently obtained in the context of real and/or complex analytic spaces, with Y^i which here are analytic subspaces of Y. This result makes it plausible that we already have at our disposal techniques which are powerful enough to also prove a dévissage theorem in the tame context, apparently more general, but probably less arduous.

The context of tame topology should also, it seems to me, make it possible to formulate with precision a certain very general principle which I frequently use in a great variety of geometric situations, which I call the "principle of anodine choices" – as useful as vague in appearance! It says that when for the needs of some construction of a geometric object in terms of others, we are led to make a certain number of arbitrary choices along the way, so that the final object appears to depend on these choices, and is thus stained with a defect of canonicity, that this defect is indeed serious (and to be removed requires a more careful analysis of the situation, the notions used, the data introduced etc.) whenever at least one of these choices is made in a space which is not "contractible", i.e. whose π_0 or one of whose higher invariants π_i is non-trivial, and that this defect is on the contrary merely apparent, and the construction itself is "essentially" canonical and
38/39 will not bring along any troubles, whenever the choices made are all "anodine", i.e. made in contractible spaces. When we try in actual examples to really understand this principle, it seems that each time we stumble onto the same notion of "∞-isotopic categories" expressing a given situation, and finer than the more naive isotopic (= 0-isotopic) categories obtained by considering only the π_0 of the spaces of isomorphisms introduced in the situation, while the ∞-isotopic point of view considers all of their homotopy type. For example, the naive isotopic point of view for compact surfaces with boundary of type (g, ν) is "good" (without any hidden boomerangs!) exactly in the cases which I call "anabelian" (and which Thurston calls "hyperbolic"), i.e. distinct from $(0,0)$, $(0,1)$ $(0,2)$, $(1,0)$ – which are also exactly the cases where the connected component of the identity of the automorphism group of the surface is contractible. In the other cases, except for the case $(0,0)$ of the sphere without holes, it suffices to work with 1-isotopic categories to express in a satisfying way via algebra the essential geometrico-topological facts, since the said connected component is then a $K(\pi, 1)$. Working in a 1-isotopic category actually comes down to working in a bicategory, i.e. with $\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)$ which are (no longer discrete sets as in the 0-isotopic point of view, but) groupoids (whose π_0 are exactly the 0-isotopic Hom). This is the description in purely algebraic terms of this bicategory which is given in the last part of the thesis of Yves Ladegaillerie (cf. par. 3).

If I allowed myself to dwell here at some length on the theme of the foundations of tame topology, which is not one of those to which I intend to devote myself prioritarily in the coming years, it is doubtless because I feel that it is yet another cause which needs to be pleaded, or rather: a work of great current importance which needs hands! Just as years ago for the new
39/40 foundations of algebraic geometry, it is not pleadings which will surmount

the inertia of acquired habits, but tenacious, meticulous long-term work, which will from day to day bring eloquent harvests.

I would like to say some last words on an older reflection (end of the sixties?), very close to the one I just discussed, inspired by ideas of Nash which I found very striking. Instead of axiomatically defining a notion of "tame theory" via a notion of a "tame part of $\mathbb{R}^n$" satisfying certain conditions (mainly of stability), I was interested by an axiomatisation of the notion of "non-singular variety" via, for each natural integer n, a subring $\mathcal{A}_n$ of the ring of germs of real functions at the origin in $\mathbb{R}^n$. These are the functions which will be admitted to express the "change of chart" for the corresponding notion of $\mathcal{A}_n$-variety, and I was first concerned with uncovering a system of axioms on the system $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ which ensures for this notion of variety a suppleness comparable to that of a C^∞ variety, or a real analytic one (or a Nash one). According to the familiar type of construction which one wants to be able to do in the context of $\mathcal{A}$-varieties, the relevant system of axioms is more or less reduced or rich. One doesn't need much if one only wants to develop the differential formalism, with the construction of jet bundles, De Rham complexes etc. If we want a statement of the type "quasi-finite implies finite" (for a map in the neighbourhood of a point), which appeared as a key statement in the local theory of analytic spaces, we need a more delicate stability axiom, in Weierstrass'
$\frac{40}{41}$ "Vorbereitungssatz" (*). In other questions, a stability axiom by analytic continuation (in $\mathbb{C}^n$) appears necessary. The most Draconian axiom which I was led to introduce, also a stability axiom, concerns the integration of Pfaff systems, ensuring that certain (even all) Lie groups are $\mathcal{A}$-varieties. In all this, I took care not to suppose that the $\mathcal{A}_n$ are $\mathbb{R}$-algebras, so a constant function on a $\mathcal{A}$-variety is "admissible" only if its value belongs to a certain subfield K of $\mathbb{R}$ (which is, if one likes, $\mathcal{A}_0$). This subfield can very well be $\mathbb{Q}$, or its algebraic closure $\overline{\mathbb{Q}}_r$ in $\mathbb{R}$, or any other subextension of $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, preferably even of finite or at least countable transcendence degree over $\mathbb{Q}$. This makes it possible, for example, as before for tame spaces, to have every point x of a variety (of type $\mathcal{A}$) correspond to a residue field $k(x)$, which is a subextension of $\mathbb{R}/K$. A fact which appears important to me here, is that even in its strongest form, the system of axioms does not imply that we must have $K = \mathbb{R}$. More precisely, because all the axioms are stability axioms, it follows that for a given set S of germs of real analytic functions at the origin (in various spaces $\mathbb{R}^n$), there exists a smaller theory

(*) It could seem simpler to say that the (local) rings $\mathcal{A}_n$ are Henselian, which is equivalent. But it is not at all clear a priori in this latter form that the condition in question is in the nature of a stability condition, and this is an important circumstance as will appear in the following reflections.

$\mathcal{A}$ for which these germs are admissible, and that it is "countable", i.e. the $\mathcal{A}_n$ are countable, whenever S is. A fortiori, K is then countable, i.e. of countable transcendence degree over $\mathbb{Q}$.

The idea here is to introduce, via this axiomatic system, a notion of an "elementary" (real analytic) function, or rather, a whole hierarchy of such notions. For a function of 0 variables i.e. a constant, this notion gives that of an "elementary constant", including in particular (in the case of the strongest axiomatic system) constants such as π, e and many others, taking values of admissible functions (such as exponentials, logarithms etc.) for systems of "admissible" values of the argument. One feels that the relation between the system $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and the corresponding rationality field
$\frac{41}{42}$ K must be very tight, at least for $\mathcal{A}$ which can be generated by a finite "system of generators" S – but one must fear that even the least of the interesting questions one could ask about this situation still remains out of reach ([1]).

These old reflections have taken on some current interest for me due to my more recent reflection on tame theories. Indeed, it seems to me that it is possible to associate in a natural way to a "differentiable theory" $\mathcal{A}$ a tame theory $\mathcal{T}$ (doubtless having the same field of constants), in such a way that every $\mathcal{A}$-variety is automatically equipped with a $\mathcal{T}$-tame structure and conversely for every $\mathcal{T}$-tame compact space X, we can find a rare tame closed subset Y in X, such that $X\backslash Y$ comes from an $\mathcal{A}$-variety, and moreover such that this $\mathcal{A}$-variety structure is unique at least in the following sense: two such structures coincide in the complement of a rare tame subset $Y' \supset Y$ of X. The theory of dévissage of stratified tame structures (which was discussed in the preceding par.), in the case of smooth strata, should moreover raise much more precise questions of comparison of tame structures with structures of differentiable (or rather, $\mathbb{R}$-analytic) type. I suspect that the type of axiomatisation proposed here for the notion of "differentiable theory" would give a natural framework for the formulation of such questions with all desirable precision and generality.

7. Since the month of March last year, so nearly a year ago, the greater part of my energy has been devoted to a work of reflection on the foundations of non-commutative (co)homological algebra, or what is the same, after all, of homotopic algebra. These reflections have taken the concrete form of a voluminous stack of typed notes, destined to form the first volume (now being
$\frac{42}{43}$ finished) of a work in two volumes to be published by Hermann, under the overall title "Pursuing Stacks". I now foresee (after successive extensions of the initial project) that the manuscript of the whole of the two volumes, which I hope to finish definitively in the course of this year, will be about